

© 2025 Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland  
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.

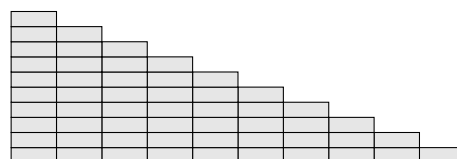
650811

In einer Mathe-AG stellt die AG-Leiterin drei Gefäße auf den Tisch. Das erste Gefäß fasst genau 10 Liter und ist bis zum Rand mit Wasser gefüllt. Das zweite Gefäß fasst genau 5 Liter und ist leer. Das dritte Gefäß fasst genau 3 Liter und ist ebenfalls leer. Keines der Gefäße hat eine Mess-Skala. Nur durch Umgießen soll die Wassermenge, die sich im ersten Gefäß befindet, so auf die drei Gefäße verteilt werden, dass sich schließlich in einem der Gefäße genau 1 Liter Wasser befindet. Die AG-Leiterin behauptet: „Das schafft man mit viermaligem Umgießen.“

Beweise, dass diese Behauptung richtig ist.

650812

Marie und Olga sehen in einem Baumarkt ein Ziegeldreieck, das sind Ziegel, die in Form eines rechtwinkligen Dreiecks gestapelt sind, siehe Abbildung. In der untersten Reihe liegen 10 Ziegel.



In jeder weiteren Reihe darüber liegt ein Ziegel weniger bis zur 10. Reihe, in der nur noch ein Ziegel liegt.

Marie will wissen, wie viele Ziegel dort insgesamt gestapelt sind, und beginnt laut die Anzahlen der jeweiligen Reihen zu addieren. Olga unterbricht sie schnell und nennt die korrekte Anzahl. „Wie bist du so schnell darauf gekommen?“ fragt Marie. Olga antwortet: „Ich habe die Summenformel von Gauß angewandt.“

Der Satz zur Gaußschen Summenformel lautet:

*Für alle natürlichen Zahlen  $n$  größer als 0 ist  $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$  die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis  $n$ .*

- Begründe die Gaußsche Summenformel am Beispiel  $n = 10$ . Ergänze dazu das Ziegeldreieck aus der Abbildung mit einer Kopie des Ziegeldreiecks zu einem Rechteck. Berechne die Anzahl an Ziegeln in diesem Rechteck und damit die Anzahl an Ziegeln im Ziegeldreieck.
- Berechne die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 1000.
- Berechne die Summe aller ungeraden natürlichen Zahlen kleiner als 1000.
- Berechne die Summe aller durch 8 teilbaren natürlichen Zahlen zwischen 65 und 2025.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

### 650813

In einer Reihe liegen genau 65 Karten. Alle Karten liegen mit der Vorderseite nach oben. Die Karten sind von links nach rechts von 1 bis 65 aufsteigend nummeriert.

Im ersten Schritt wird jede Karte umgedreht. Im zweiten Schritt wird jede zweite Karte umgedreht, also die Karten mit den Nummern 2, 4, 6, 8 und so weiter. Im dritten Schritt wird jede dritte Karte umgedreht, also die Karten mit den Nummern 3, 6, 9, 12 und so weiter. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis im 65. Schritt jede 65. Karte umgedreht wird, also nur die Karte mit der Nummer 65.

Untersuche, welche Karten am Ende mit der Rückseite nach oben liegen.

### 650814

Das Geometrie-Programm GeoMO zur ebenen Geometrie beherrscht neben der bedingungslosen Wahl von Punkten in der Ebene folgende Konstruktionen jeweils aus vorgegebenen oder schon konstruierten Objekten:

- Konstruktion der **Geraden** durch zwei verschiedene Punkte und des **Kreises** um einen Punkt als Mittelpunkt und durch einen anderen Punkt oder mit der Länge einer Strecke als Radiuslänge.
- Konstruktion der **Schnittpunkte** zweier Geraden, zweier Kreise sowie einer Geraden und eines Kreises.
- Konstruktion der **Mittelsenkrechten** und des **Mittelpunkts** einer Strecke, der **Winkelhalbierenden** eines Winkels, der **Parallelen** und der **Senkrechten** zu einer Geraden durch einen Punkt.
- Konstruktion von **Strecken**, **Strahlen**, **Halbebenen**, **Winkeln**, **Kreisbögen** und **Vielecken** aus sie eindeutig bestimmenden Punkten, Geraden oder Kreisen.
- Auswahl eines Punktes aus mehreren Punkten sowie die Wahl eines Punktes, der auf, innerhalb oder außerhalb eines Objektes liegt, zwischen Objekten liegt oder verschieden von einem Punkt ist.

Weitere Konstruktionen beherrscht dieses Programm nicht, sie sind also bei Bedarf aus den obigen zusammenzusetzen.

In GeoMO sind zwei voneinander verschiedene, zueinander parallele Geraden  $g$  und  $h$  sowie ein Punkt  $P$  zwischen ihnen vorgegeben. Es ist ein Kreis  $k$  zu konstruieren, der  $g$  und  $h$  berührt und durch  $P$  verläuft.

- a) Gib eine Konstruktionsbeschreibung mit Konstruktionsschritten des Programms GeoMO zur Konstruktion eines solchen Kreises an.
- b) Fertige eine Zeichnung mit den in der Konstruktionsbeschreibung aus Teil a) beschriebenen Punkten, Geraden und Kreisen an und beschrifte in dieser Zeichnung die verwendeten Punkte, Geraden und Kreise.
- c) Begründe, warum der nach der Konstruktionsbeschreibung aus Teil a) konstruierte Kreis  $k$  die Forderungen erfüllt.